

Subprime-Krise, Kreditderivate und Ausfallabhängigkeiten

VON DIPL.-WI.-ING., DIPL.-MATH. OEC.

MICHAEL KUNISCH UND PROF. DR.

MARLIESE UHRIG-HOMBURG

Lehrstuhl für Financial Engineering und Derivate

Die aktuellen Probleme im amerikanischen Subprime-Immobilienmarkt haben eine lebhaft diskutierte Diskussion über die Vor- und Nachteile von Kreditderivaten und deren Bewertungsmodelle entfacht.

Zum Hintergrund der Krise

Ausgangspunkt war ein Umfeld historisch niedriger Zinssätze durch eine ganze Serie von US-Leitzinssenkungen nach dem Ende des Internetbooms und den Anschlägen des 11. Septembers. Die niedrigen Zinsen begünstigten den kreditfinanzierten Kauf von Eigenheimen. Dabei wurden verstärkt variabel verzinsliche Kredite an Kreditnehmer mit geringer Bonität vergeben, häufig in Höhe des gesamten Kaufpreises. Immobilienkredite in diesem sogenannten Subprime-Segment besitzen naturgemäß hohe Ausfallrisiken. Diese wurden einerseits, soweit sie im Vorfeld erwartet wurden, in Form erhöhter Kreditzinsen bereits einkalkuliert. Darüber hinaus erschien die Immobilie, insbesondere vor dem Hintergrund steigender Immobilienpreise, als sehr werthaltige Sicherheit.

Bereits 2005 führten steigende US-Zinssätze dazu, dass sich auch die von den Schuldnern zu leistenden Zinszahlungen vereinbarungsgemäß erhöhten und erste Schuldner ihren Zahlungsverpflichtungen nicht mehr nachkommen konnten. Eine restriktivere Vergabe neuer Kredite und Zwangsversteigerungen in einem ohnehin ungünstigeren Konjunkturklima sowie ein

damit einhergehender Druck auf die Immobilienpreise war die Konsequenz. In der Folge verloren Subprime-Kredite massiv an Wert und wurden in erheblichem Umfang abgeschrieben. Verluste entstanden jedoch nicht nur bei den Instituten, die solche Kredite direkt vergeben hatten, da große Teile der Subprime-Risiken verbrieft und ausplatziert worden waren. Vielmehr etablierten die meisten größeren Finanzinstitute außerbilanzielle, weitgehend unregulierte Sondergesellschaften, so genannte Conduits, über die sie im Kern ein Portfolio aus langfristigen Krediten mit der Emission von kurzfristigen vorrangigen Schuldtiteln (Asset Backed Commercial Papers) finanzierten. Neben realen Krediten waren langfristige Anleihen einzelner Schuldner, aber auch in zunehmendem Maße komplexe Mehrschuldner Kontrakte in Form von Collateralized Debt Obligations (CDOs) auf der Aktivseite dieser Conduits zu finden. Wertverluste bei den Subprime-Krediten wirkten sich allerdings nicht nur direkt auf der Aktivseite der Conduits aus, sondern auch die Refinanzierung wurde zunehmend schwieriger. Teilweise blieb nur noch die Wahl, auch sehr gute Anlagen aus dem Portfolio aufzulösen, um die kurzfristigen Schuldtitel bedienen zu können. Der zunehmende Preisdruck auf Schuldtitel immer besserer Qualität in der Folge dokumentiert eindrucksvoll die Ansteckungseffekte der Subprime Krise auf andere Märkte.

Modell- statt Marktpreise

Was hat die Krise nun mit mathematischen Modellen zur Bewertung von Kreditderivaten zu tun? Bei der Beurteilung der Anlagen der Conduits stellt sich das Problem, dass die Bewertung der komplexen Portfolio-

Strukturen mangels verfügbarer Marktpreise in der Regel nur mit Hilfe theoretischer Modelle erfolgen kann. Entscheidende Komponente ist die modellierte Abhängigkeitsstruktur, die den Wert der Portfoliostrukturen wesentlich treibt. Anders als Abhängigkeiten in Aktienportfolios lassen sich Ausfallabhängigkeiten in Kreditportfolios allerdings kaum anhand historischer Daten messen, da gemeinsame Ausfälle sehr selten beobachtbar sind. Daher wird ein Modell benötigt, das diese Abhängigkeitsstruktur konsistent zu den anderen Komponenten modellieren kann. Wie die Krise zeigt, konnten die typischerweise eingesetzten Standardmodelle bei der Beurteilung des Risikos wenig überzeugen. Dies liegt daran, dass sie die Dynamiken der zugrunde liegenden Risikofaktoren stark einschränken und die Auswirkungen von globalen Makrofaktoren auf das Rückzahlungsvermögen einzelner Schuldner unberücksichtigt lassen. Schon allein aufgrund ihrer Struktur sind sie daher nicht in der Lage, das Clustern von Ausfällen zu erklären. Sie würden niemals Entwicklungen wie die aktuelle Subprime-Krise vorhersagen können und schätzen somit letztlich die Risiken in den Kontrakten fehl ein.

Adäquate Modelle zur Bestimmung des fairen Wertes komplexer strukturierter Kreditprodukte müssen Abhängigkeiten von ökonomieweiten Faktoren sowie zwischen Schuldnern erfassen. Das DFG-Projekt „Modellierung von Kreditrisiken unter besonderer Berücksichtigung von Ausfallabhängigkeiten“ am Lehrstuhl für Financial Engineering und Derivate widmet sich dieser Fragestellung. Neben der Analyse existierender Modelle wird ein eigener Modellrahmen für die Bewertung solcher Produkte entwickelt und untersucht.

Im Folgenden soll zunächst eine kurze Einordnung existierender Modelle gegeben und darauf aufbauend die Grundidee des vorgeschlagenen Modellrahmens vorgestellt werden.

Modellierungsansätze im Überblick

Für Abhängigkeiten zwischen Ausfallereignissen lässt sich typischerweise mindestens eine der folgenden Erklärungen geben:

- Gemeinsame oder korrelierte Faktoren beeinflussen die Ausfallwahrscheinlichkeiten der verschiedenen Kreditnehmer (**gemeinsame Risikofaktoren**).
- Latente Variablen beeinflussen Ausfallwahrscheinlichkeiten der verschiedenen Kreditnehmer, wobei bestimmte Ereignisse (insb. Ausfälle) zu einer veränderten Einschätzung über latente Variablen führen (**Lernen von Ausfällen**).
- Der Ausfall eines Kreditnehmers führt zu einem direkten Ausfall eines anderen Kreditnehmers oder erhöht dessen Ausfallwahrscheinlichkeit direkt (**Ansteckung**).

Die Herausforderung in der Modellierung von Abhängigkeiten liegt in der Spezifikation einer Modellstruktur, die einerseits Abhängigkeiten in realistischer Größenordnung erzeugt, aber gleichzeitig auch für eine große Anzahl von Kreditnehmern verwendbar, d.h. insbesondere hinreichend sparsam parametrisiert ist. Darüber hinaus sollte eine im Zeitablauf realistische Struktur der Ausfälle wie z.B. ein Clustering von Ausfällen abgebildet werden können.

Die ursprünglich zur Bewertung ausfallbehafteter Instrumente auf einzelne Adressen entwickelten Struktur- und Reduktionsmodelle lassen sich grundsätzlich auf mehrere Adressen erweitern:

Strukturmodelle koppeln den Insolvenztatbestand an die Höhe des Unternehmenswertes eines Schuldners. Somit können Ausfallabhängigkeiten durch Korrelationen von Unternehmenswerten verschiedener Schuldner induziert werden. In den sogenannten First-Passage-Zeit Modellen fällt ein Schuldner dann aus, wenn der Unternehmenswert zum ersten Mal eine kritische

untere Schranke erreicht. In einer Erweiterung dieser Modelle lässt sich hierzu eine analytische Lösung für zwei Schuldner ableiten. Die Ausweitung auf viele unterschiedliche Schuldner stößt bei der praktischen Umsetzung jedoch schnell an ihre Grenzen.

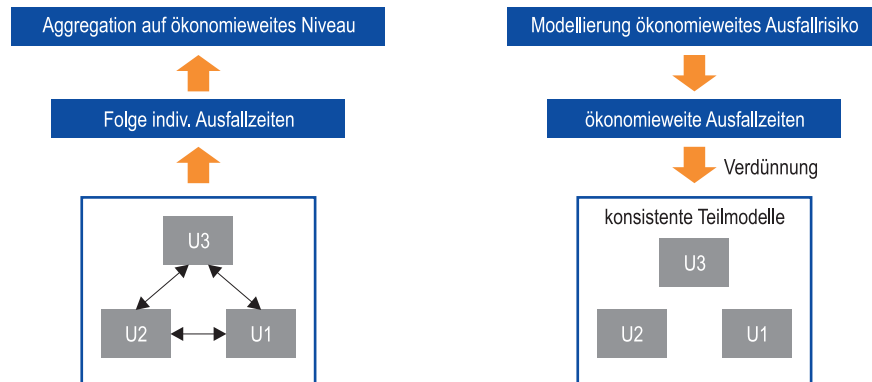
Reduktionsmodelle bilden Ausfall über eine exogen unterstellte Ausfallintensität ab, die im Kern die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ausfallereignissen festlegt und damit letztlich die Ausfallwahrscheinlichkeit vorgibt. Zur Bewertung von ausfallbehafteten Anleihen und Kreditderivaten haben sich Reduktionsmodelle mittlerweile als Standard etabliert, da ihre flexible Modellstruktur eine Bewertung von unterschiedlichsten Zahlungsströmen erlaubt. Im Unterschied zu Strukturmodellen sind sie darüber hinaus in der Lage, realistische Kredit-spreads bei kurzen Laufzeiten abzubilden, indem sie unterstellen, dass die Marktteilnehmer zu keinem Zeitpunkt in der Lage sind, den Ausfallzeitpunkt vorherzusehen. Der Ausfallzeitpunkt wird dabei als Sprung eines Punktprozesses modelliert. Im einfachsten Fall wird ein homogener Poisson Prozess herangezogen, eine realistischere Beschreibung erlauben doppelt-stochastische Poisson Prozesse. Letztere besitzen eine Intensität, die selbst einem stochastischen Prozess folgt, der etwa durch verschiedene makroökonomische Zustandsvariablen oder unternehmensindividuelle Faktoren getrieben wird. Über korrelierte Ausfallintensitäten lassen sich somit auch im Rahmen von Reduktionsmodellen grundsätzlich Ausfallabhängigkeiten erzeugen. Dies lässt sich dadurch erreichen, dass die Ausfallintensitäten der betrachteten Adressen von gemeinsamen Zustandsvariablen getrieben werden. Allerdings erweisen sich die durch solche doppelt-stochastischen Ausfallmodelle mit korrelierten Intensitäten erzeugbaren Ausfallabhängigkeiten i.A. als unrealistisch niedrig.

Ein Grund dafür liegt in der bedingten Unabhängigkeit der Ausfallzeitpunkte, gegeben die Information über die Zustandsvariablen. Letztlich erklären die beschriebenen Reduktionsansätze - ähnlich wie die Erweiterungen der Strukturmodelle - Ausfallabhängigkeiten lediglich über gemeinsame Risikofaktoren und bilden damit weder

direkte Ansteckungseffekte ab, noch berücksichtigen sie indirekte Ansteckungseffekte über das Lernen von Ausfällen. Der Ausfall eines Schuldners hat somit keinen Einfluss auf die Intensitäten der verbleibenden Schuldner. Dieser Nachteil wird in Modellen mit Ansteckungseffekten aufgegriffen. Zur formalen Beschreibung der Idee, dass sich der Ausfall eines Akteurs negativ auf weitere Akteure auswirkt, unterstellen sie, dass sich die Ausfallintensität eines Schuldners sprunghaft erhöht, sobald ein zweiter Schuldner ausfällt. Diese grundsätzlich sehr plausible Modellierung einer direkten Ansteckung erweist sich allerdings für reale Bewertungsprobleme mit mehreren Schuldnern aufgrund von Schätzproblemen und einer hohen Komplexität bei der Ausdehnung auf mehrere Schuldner als wenig praktikabel.

Neueste Ansätze modellieren Ansteckungseffekte durch dynamisches Lernen des Marktes, so z.B. die sogenannten Frailty-Modelle. Dabei werden die individuellen Ausfallintensitäten von einer gemeinsamen unbeobachtbaren Komponente (frailty) mit einer gegebenen Prior-Verteilung beeinflusst. Fällt ein Schuldner aus, so erhält der Markt dadurch neue Information, die eine Veränderung der Verteilung der unbeobachteten Komponente bewirkt, und damit indirekt die Intensität anderer Schuldner beeinflusst. Auch Copula-basierte Ansätze können in dieser Weise interpretiert werden. Ganz allgemein handelt es sich bei Copulas um ein aus der deskriptiven Statistik stammendes Konzept zur Konstruktion multivariater Verteilungen, im Rahmen dessen die Abhängigkeitsstruktur über Copulas unabhängig von den jeweiligen Randverteilungen spezifiziert werden kann.

In bisherigen Arbeiten finden sich meist ad hoc Spezifikationen der Copulas, aber kaum Hinweise, welche Copula zu wählen ist. Damit ergibt sich zwar durch die Separation des Ausgangsproblems der Spezifikation einer gemeinsamen Verteilung von Ausfällen in die zwei Teilprobleme „Spezifikation der Randverteilungen“ und „Spezifikation der Abhängigkeitsstruktur“ eine Erleichterung. Allerdings ergeben sich für das Kernproblem der Spezifikation der Abhängigkeitsstruktur keine neuen Einsichten.



▲ Illustration des Vorgehens und dem Unterschied bei Bottom-Up (links) und Top-Down (rechts) Ansätzen.

Top-Down versus Bottom-Up Ansätze zur Abbildung von Ausfallabhängigkeiten

Ausfallabhängigkeiten werden meist ausgehend von individuellen Intensitäten der einzelnen Schuldner mit anschließender Aggregation zu einem Modell für die Gesamtoökonomie als bottom-up Konstruktion abgebildet (vgl. Abbildung links). Hierzu gehören sowohl doppelt-stochastische als auch sich selbst beeinflussende Prozesse, wie sie zur Abbildung der oben erwähnten Ansteckungs- oder Lerneffekte verwendet werden. Das Gesamtrisiko in der Ökonomie ergibt sich dann durch Addition der individuellen Intensitäten. Im Rahmen des DFG-Projekts wird ein alternativer Ansatz verfolgt, der im Rahmen einer top-down Konstruktion direkt die Ausfallintensität für die Gesamtoökonomie spezifiziert. Anschließend können daraus unter Verwendung eines geeigneten Verdünnungsprozesses die individuellen Intensitäten konsistent abgeleitet werden (vgl. Abbildung rechts).

Abhängigkeiten zwischen einzelnen Adressen werden somit zunächst in einem ersten Schritt über den ökonomieweiten Gesamtintensitätsprozess in aggregierter Weise eingeführt, ohne dazu jede Adresse einzeln modellieren zu müssen. Für die Anwendung hat dies den Vorteil, dass für jedes beliebige Portfolio eine effiziente und konsistente Bestimmung der individuellen Intensitäten in Relation zu der gesamtwirtschaftlichen Intensität möglich ist. Darüber hinaus besitzt die top-down Konstruktion zentrale Vorteile in Bezug auf die abbildbare Abhängigkeitsstruktur. Insbesondere ist es nicht erforderlich, bedingte Unabhängigkeit der Ausfallzeitpunkte wie bei der

bottom-up Konstruktion zu unterstellen, da zunächst nur ein einzelner Punktprozess definiert werden muss.

Zentrales Element des zweiten Schritts ist dann der Verdünnungsprozess, über den letztlich eine Aufteilung des Gesamtausfallrisikos auf die einzelnen Adressen erfolgt. Auch wenn das Gesamtausfallrisiko in der Ökonomie infolge des Ausfalls eines Schuldners unberührt bleibt, wird sich das Ausfallrisiko anderer dadurch in der Regel sprunghaft erhöhen. Dies ist auf eine Umverteilung der Gewichte im Verdünnungsprozess zurückzuführen und ließe sich je nach Ausgestaltung des Verdünnungsprozesses als impliziter Ansteckungseffekt oder auch als implizites Lernen von Ausfällen interpretieren. Explizite Ansteckungs- oder Lerneffekte verbunden mit einer Erhöhung des in der Ökonomie vorhandenen Gesamtrisikos bei Ausfall lassen sich zusätzlich über sich selbst beeinflussende Prozesse für die ökonomieweite Ausfallintensität abbilden.

Modellökonomie und Bewertungsrahmen

Zur Konkretisierung des entwickelten Modellrahmens (vgl. hierzu Kunisch/Uhrig-Homburg (2008)) betrachten wir eine aus n Unternehmen bestehende Ökonomie, deren Ausfallstatus durch einen vektorwertigen Zählprozess abgebildet wird. Im Gegensatz zu anderen Ansätzen nehmen wir nicht an, dass die individuellen Zählprozesse einem Poisson Prozess folgen, da dies gegen gleichzeitige bzw. zeitlich sehr nahe beieinander liegende Ausfallereignisse sprechen würde. Solche (fast) simultanen Ausfallereignisse lassen

sich durch Ansteckungseffekte erklären. Vereinfachend kann man sich dies so vorstellen, dass ein Ausfall eines Unternehmens i mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit q zu einem direkten Ausfall eines anderen Unternehmens j führt. Dies kann zu gemeinsamen Sprüngen im oben definierten Zählprozess führen und wäre daher nicht konform mit der Annahme eines Poisson Prozesses. Daher modellieren wir im Folgenden nicht einzelne Unternehmen, sondern betrachten ganze Mengen von Unternehmen. Ausfälle, die eine direkte Konsequenz eines Ausfallereignisses eines anderen Unternehmens sind, werden somit als ein gemeinsames Ereignis aufgefasst. Zu dem Zählprozess N betrachten wir einen äquivalenten Prozess auf Basis von Mengen, der im Folgenden als

$$\tilde{N} = (\tilde{N}^{(1)}, \dots, \tilde{N}^{(1, \dots, n)})$$

bezeichnet wird. Dieser Prozess besteht nun aus $2^n - 1$ Komponenten, die jeweils unabhängige Ereignisse repräsentieren. Auf Basis dieser Modellökonomie können wir nun einen allgemeinen Bewertungsrahmen in drei wesentlichen Schritten ableiten:

(1) Im ersten Schritt spezifizieren wir das ökonomieweite Ausfallrisiko. Hierzu betrachten wir das Ereignis, dass irgendeine Menge von Unternehmen ausfällt, es also in \tilde{N} zu einem Sprung kommt. Dies entspricht somit dem Ereignis, dass in N ein Sprung in mindestens einer Komponente des Zählprozesses stattfindet. Als zugehörige Sprungintensität $\bar{\lambda}$ unterstellen wir zunächst einen durch makroökonomische Faktoren getriebenen stochastischen Prozess. Grundsätzlich wäre neben dieser doppelt-stochastischen Formulierung auch ein selbst beeinflussender Prozess denk-

bar. Dieser würde dann nach einem Ausfallereignis zu einer sprunghaften Veränderung der Gesamtintensität führen und könnte als Lernen durch die Beobachtung eines Ausfallereignisses interpretiert werden.

(2) Im zweiten Schritt gilt es, das überspezifizierte Gesamtausfallrisiko auf die Einzelebene herunterzubrechen. Hierzu ist die Definition eines geeigneten Verdünnungsprozesses notwendig. Für eine Menge A von Unternehmen lässt sich diese Verdünnung als die Wahrscheinlichkeit interpretieren, dass genau die Unternehmenskombination A ausfällt, gegeben ein Ausfallereignis tritt überhaupt ein. Somit liefert die Verdünnung letztlich die Information, welche Unternehmenskombination bei einem Ausfallereignis betroffen ist. Darüber ist nun eine Charakterisierung der zugehörigen Intensität λ^A für den Ausfall der Menge A möglich und man erhält für jede der unabhängigen Komponenten von \tilde{N} eine zugehörige Intensität eines entsprechenden Poisson Prozesses.

(3) Die Unabhängigkeit der Komponenten erweist sich im dritten Schritt für die Ableitung von Bewertungsformeln für ausfallbehaftete Instrumente als hilfreich: Zwar referenzieren die zu bewertenden Instrumente typischerweise auf den Ausfallstatus eines bestimmten Unternehmens i und nicht auf den Ausfallstatus einer bestimmten Menge A von Unternehmen. Allerdings stellt sich der Ausfallzeitpunkt eines Unternehmens i aufgrund der Unabhängigkeit der mengenwertigen Ereignisse als Minimum derjenigen auf Mengen basierenden Ausfallzeiten dar, in deren Mengen das Unternehmen i enthalten ist. Die Intensität des Minimums von unabhängigen Ausfallereignissen, die einem Poisson Prozess mit entsprechender Intensität folgen, ergibt sich dabei als die Summe der jeweiligen Einzelintensitäten. Auf diese Art und Weise erhält man für die Intensität der einzelnen Unternehmen i eine Repräsentation über einen Poisson Prozess und kann unter Berücksichtigung der zusätzlichen Intensitäten für gemeinsame Ereignisse die entsprechenden Bewertungsformeln, wie sie aus doppelt-stochastischen Standardmodellen bekannt sind, in analoger Weise verwenden. In diesem Rahmen lassen sich nun auch einfach korrelationsensitive Produkte

wie first-to-default Swaps bewerten. Diese Kreditderivate referenzieren auf einen Korb von Schuldtiteln und zahlen bei dem ersten Auftreten eines Ausfalls einen vorher spezifizierten Betrag. Bezieht sich der Kontrakt dabei auf alle Unternehmen der Ökonomie, so ist die entsprechende Intensität direkt durch $\bar{\lambda}$ gegeben.

Im vorliegenden Modellrahmen kommt der konkreten Ausgestaltung des Verdünnungsprozesses eine zentrale Rolle zu. Formal ist dabei lediglich zu fordern, dass jede einzelne Komponente nichtnegativ, im Falle eines Ausfalls null und in der Summe aller Elemente eins sein muss. Zur Ausgestaltung der Freiheitsgrade schlagen wir vor, Elemente von Strukturmodellen, insbesondere die Dynamik des Unternehmenswertes, die Struktur der Verbindlichkeiten sowie die Korrelationen der Unternehmenswerte, hierzu heranzuziehen. Mit Hilfe eines einfachen Strukturmodells wie z.B. dem Merton-Modell lässt sich daraus bestimmen, wie wahrscheinlich es ist, dass eine entsprechende Unternehmenskombination überschuldet ist. Ein auf dieser Größe basierender Verdünnungsprozess trägt der Vorstellung Rechnung, dass eher die Unternehmen von einem plötzlichen Ausfallereignis betroffen sind, die sich näher an einer Überschuldung bewegen. Dadurch wird eine Einbindung von ökonomischen Strukturelementen im Rahmen eines Reduktionsmodells unter Beibehaltung von dessen Vorteilen ermöglicht.

Die wesentlichen Punkte des entwickelten Modellrahmens lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Unter Ausnutzung der Vorteile einer top-down Konstruktion wird ausgehend von einer ökonomieweiten Ausfallintensität ein konkretes, für Anwendungszwecke geeignetes Reduktionsmodell spezifiziert.
- Gleichzeitige Ausfälle mehrerer Unternehmen sind grundsätzlich möglich.
- Der Ansatz erlaubt eine flexible Abhängigkeitsstruktur, die gemeinsame Risikofaktoren, direkte Ansteckungseffekte über explizite Unternehmensbeziehungen und Lernen von Ausfällen beinhalten kann.
- Die konkrete Ausgestaltung des Verdünnungsprozesses erfolgt über ein Strukturmodell, das es ermöglicht, die mathematische Attraktivität von Reduktionsmodellen

mit dem ökonomischen Reiz der Strukturmodelle zu verbinden.

Ausblick

Die aktuelle Krise war nicht zuletzt eine Krise der Modelle und des überlegten Handelns von Banken und Ratingagenturen. Beide zogen letztlich Modelle heran, die nicht in der Lage waren, die Risiken richtig einzuschätzen. In Verbindung mit der von Finanzinstituten über längere Zeit betriebenen Politik, Risiken im großen Stil außerhalb der Bilanz anzuhäufen, da Liquiditätsgarantien an Zweckgesellschaften nicht mit Eigenkapital zu hinterlegen waren, erscheint die Krise zwar ex post wenig überraschend, aber doch höchst alarmierend. Die Frage, inwieweit geänderte Eigenkapitalvorschriften, insbesondere die seit Anfang des Jahres in Kraft getretenen Regeln von Basel II, das Ausmaß der Krise hätten vermindern können, wird derzeit kontrovers diskutiert. In jedem Fall sollten die Finanzinstitute mindestens die Lehre aus der Krise ziehen, dass es zwingend erforderlich ist, die Abbildung und konkrete Erfassung von Risiken in ihren Modellen zu überdenken, gerade bei komplexen strukturierten Kreditprodukten.

Der hier vorgestellte Modellrahmen trägt zum Verständnis der Wirkungsweise von Ausfallabhängigkeiten in Kreditderivaten bei. Bislang sind allerdings nur theoretische Aussagen über die Auswirkungen zu treffen. Erste empirische Ergebnisse wie von Longstaff/Rajan (2008) zeigen allerdings, dass diese Ansätze vielversprechend sind. Offen ist jedoch noch, wie die einzelnen Komponenten auszugestaltet sind, welcher Dynamik die Risikofaktoren folgen sollen und auf welcher Basis die Verdünnung bestimmt werden sollte. Diese Fragen sind zu beantworten, bevor man diese neue Modellklasse bei Banken einsetzen kann.

Literatur

Michael Kunisch und Marliese Uhrig-Homburg, 2008, *Modelling Simultaneous Defaults: A Top-Down Approach*, forthcoming in: *Journal of Fixed Income*.

Longstaff, Francis und Arvind Rajan, 2008, *Modelling Simultaneous Defaults: A Top-Down Approach*, in: *Journal of Finance*, Vol. 63, S. 529 - 563.